



TITLE:

管内流中における衝撃波の伝播 (大自由度・強非線形の波動現象の数理)

AUTHOR(S):

井上, 良紀; 片岡, 晃一; 宮本, 晃宏

CITATION:

井上, 良紀 ...[et al]. 管内流中における衝撃波の伝播 (大自由度・強非線形の波動現象の数理). 数理解析研究所講究録 1999, 1092: 158-167

ISSUE DATE:

1999-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62921>

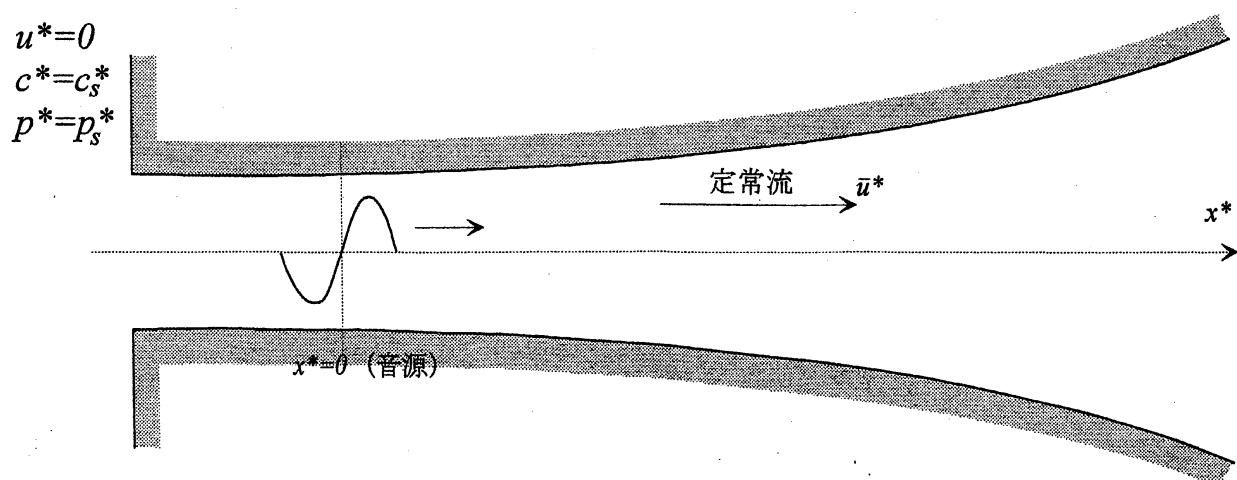
RIGHT:

管内流中における衝撃波の伝播

北海道大学大学院工学研究科 井上 良紀 (Yoshinori Inoue)
片岡 晃一 (Kouichi Kataoka)
宮本 晃宏 (Akihiro Miyamoto)

§1. はじめに

非線形音響学 (nonlinear acoustics) で周知のように, 無限に広い空間の中を進行する平面音波は, 非線形効果が十分に大きければ, 初めはなめらかな波形であっても, 波形の一部がだんだんと急峻になり衝撃波を形成し得る (たとえば, 鋸歯状波, N波など). 一般に, このような弱非線形進行波の伝播が Burgers 方程式によって記述されることはあまねく知られている. 特に, Hopf-Cole 変換によって Burgers 方程式は熱伝導方程式に変換されるので, その厳密な解を求めることができる. さらに, 静止した一様な流体で満たされている管中を伝わる弱非線形波動に関しても, 準一次元近似が認められるという条件下に, 詳しい研究がなされていて, その波動現象が一般化された Burgers 方程式で支配されることがわかっている [Ref. 1]. それに基づく解析によると, 管の断面積が変化するという非一様性の効果が, 波の振幅を変調させて衝撃波の形成距離を変えたり, 散逸性の効果に影響を及ぼす. ただし, この一般化された Burgers 方程式の解法に関しては, 音響 Reynolds 数 $Re \rightarrow \infty$ の場合 (lossless limit) を除いて, 一般には Hopf-Cole 変換のような線形方程式に帰着させる変換が見つかっていない (あるいは存在しない) ために, 数値的に解くしか方法はない. 本研究は, はじめに管内に定常な流れがある場合に, それが弱非線形波の伝播にどのような影響を及ぼすかを解析することを目的とする (定常流がある場合に拡張された問題を考察する). まず, この小論では, このような非線形波動の伝播を記述する “修正された” 一般化された Burgers 方程式を特異摂動展開法 (多重尺度法) を用いて導出する過程について述べる. また, 前述したより簡単な状況下における波動伝播と比べて, その特性がどのように異なってくるかを指数関数型ホーンについて調べる.



§2. 圧縮性流体の準一次元流を記述する方程式

管軸に沿って x 軸を設け、管の断面積を $A(x)$ とする。どの位置においても、任意の時刻に、断面内では物理量は一定とみなせる準一次元流を考える。たとえば、流速は管軸方向の成分 $u(x, t)$ のみをもつ。このような流れに関する連続の式、Navier-Stokes 方程式、エネルギーの式は、完全気体に対してつぎのように書ける。

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u A) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\eta + \frac{4}{3} \zeta \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} + \gamma \frac{p}{A} \frac{\partial (uA)}{\partial x} &= \frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{p}{\rho} \right) + (\gamma - 1) \left(\eta + \frac{4}{3} \zeta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \\ \left(\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 η と ζ は第一粘性係数および第二粘性係数、 κ は熱伝導率、 $\gamma := c_p/c_v$ (c_p : 定圧比熱、 c_v : 定積比熱) である ($\eta, \zeta, \kappa, \gamma, c_v$ は定数としている)。

式(1)-(3)に現れる物理量を以下のように無次元化しよう。時刻 t と空間座標 x は、波の角振動数 ω と波数 k_0 (k_0 は、 $x=0$ にある音源の位置における、放射された正弦音波の波数) を用いて無次元化する。また、未知関数に関しては、定常流の成分(上に bar を付す)と波動(擾乱)の成分が明確に判別できるように無次元化を行う:

$$\begin{aligned} t^* &= \omega t, \quad x^* = k_0 x, \\ \bar{u}^* &= \frac{\bar{u}}{c_0}, \quad \bar{\rho}^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \quad \bar{p}^* = \frac{\bar{p}}{\gamma p_0}, \quad A^*(x^*) = \frac{A(x)}{A_0}, \\ \frac{u}{c_0} &= \bar{u}^*(x^*) + u^*, \quad \frac{\rho}{\bar{\rho}} = 1 + \rho^*, \quad \frac{p}{\bar{p}} = 1 + p^*. \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 c_0, ρ_0, p_0, A_0 は $x=0$ における定常流に関する音速、密度、圧力、と断面積を示す。

上で * を付したものが無次元化された物理量を表わすのであるが、以後簡単化のために * 記号は省くことにするので注意されたい。

§3. 定常流と波動成分

定常な流れに小さい擾乱が加えられて波動が伝播するような弱非線形現象を考察する。実際に次節で行うように物理量を音響 Mach 数 M ($M \ll 1$) で展開することによって摂動解をもとめる。このとき定常流を表す解は、基準となる最低次の解を構成する。ここでは、2次の微小量までを含めた範囲内で議論を進める。したがって、管の断面積の変化が極めてゆるやかであるという前提条件を考慮すると、定常流に対する散逸性の効果を無視してもよいことが容易にわかる。よって、定常流を支配する方程式は

$$\frac{d}{dx} (\bar{\rho} \bar{u} A) = 0, \quad (5)$$

$$\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{dx} = 0 \quad (6)$$

となる。式(6)は、等エントロピー一流の条件 $\bar{p}/p_0 = (\bar{\rho}/\rho_0)^\gamma$ を用いると直ちに積分できる。若干の計算を行うことによって、たとえば管の断面積と管流の速度を関連づける式

$$\frac{A}{A_{chok}} = \frac{1}{\hat{U}} \left[\frac{2}{(\gamma+1) - (\gamma-1)\hat{U}^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \left(\hat{U} := \frac{\bar{u}}{u_{chok}} \right) \quad (7)$$

を得る。ただし、 A_{chok} と u_{chok} はchokingが起こる(あるいは、起こると想定される)所の断面積と流速である。

一方、波動(擾乱)を支配する方程式は、3次以上の微小量を見捨て

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - u \frac{d}{dx} \log(\bar{\rho} A), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + (\bar{u}^2 - \bar{c}^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u = & - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) R_1 \\ & - \frac{\bar{c}^2}{\gamma} \frac{\partial R_2}{\partial x} - \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \left(\bar{c}^2 \frac{d\bar{u}}{dx} - \bar{u} \frac{d\bar{c}^2}{dx} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} R_1 = & u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d\bar{u}}{dx} \right) + \frac{p - \rho}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{dx} - \frac{\bar{c}^2}{\gamma} \rho \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \left(\eta + \frac{4}{3} \zeta \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ R_2 = & u \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\gamma}{A} \frac{dA}{dx} \right) + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p}{\bar{p}} \left(\bar{u} \frac{d\bar{p}}{dx} + \gamma \frac{\bar{p}}{A} \frac{d}{dx} (\bar{u} A) \right) \\ & - \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2} \frac{\kappa}{c_v} \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

波の挙動を調べるためには、空間座標 x のかわりに、次式で定義される歪み座標 z を用いると都合がよい。

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\bar{u} + \bar{c}}, \quad \left(\text{よって } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\bar{u} + \bar{c}} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (10)$$

これは、原点からの‘距離’を、原点を出発した音波が着目している地点に到達するのに要した(無次元化された)時間で示すものである。

§3. 修正された一般化されたBurgers方程式の導出

波動の振る舞いを遠方場まで含めて有効に記述できる非線形発展方程式を導出するために、多重尺度法(method of multiple scales)を用いる。すなわち、独立変数として

$$t_n := M^n t, \quad z_n := M^n z, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

を導入する。ただし、 $M := \hat{u}/c_0$ (\hat{u} は音源の最大速度) は音響 Mach 数であり、弱非線形性の仮定により、 $M \ll 1$ である。通常どおりの多重尺度法の計算手順に従って、未知関数とオペレーターを

$$\begin{aligned} u &= Mu_1 + M^2u_2 + O(M^3), \dots, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + M \frac{\partial}{\partial t_1} + O(M^2), \dots \end{aligned} \quad (12)$$

のように展開する。これらを式(9)に代入する。このとき、定常流の物理量は z_1 のみに依存するものとする。

$O(M)$ の問題：波動方程式

$$L[u_1] := \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\bar{u} - \bar{c}}{\bar{u} + \bar{c}} \frac{\partial}{\partial z_0} \right) u_1 = 0 \quad (13)$$

を得る。ここでは、進行波解

$$u_1 = f(t_0 - z_0; t_1, z_1, t_2, z_2) \quad (14)$$

に着目しよう(後退波解を考えない)。さらに、 $\rho_1 = f/\bar{c}$, $p_1 = \gamma f/\bar{c}$ の関係も求まる。

$O(M^2)$ の問題：

$$\begin{aligned} L[u_2] = & -2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \frac{2\bar{u}}{\bar{u} + \bar{c}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial z_1} + \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial z_0} \right) + \frac{\bar{u} - \bar{c}}{\bar{u} + \bar{c}} \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1} \right] u_1 \\ & - \frac{1}{\bar{u} + \bar{c}} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\bar{u}}{\bar{u} + \bar{c}} \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \left[u_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{d\bar{u}}{dz_1} \right) + \frac{p_1 - \rho_1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{dz_1} - \frac{\bar{c}^2}{\gamma} \rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial z_0} \right. \\ & - \frac{1}{\bar{u} + \bar{c}} \frac{\omega}{\rho_0 c_0 u_0} \left(\eta + \frac{4}{3} \zeta \right) \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_0^2} \left. + \frac{\bar{c}^2}{\gamma (\bar{u} + \bar{c})^2} \frac{\partial}{\partial z_0} \left[u_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial z_0} + \frac{1}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dz_1} \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\gamma}{A} \frac{dA}{dz_1} \right) + \gamma_1 p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{1}{\bar{u} + \bar{c}} \frac{\omega}{\rho_0 c_0 u_0} \frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} (p_1 - \rho_1) \right] + \frac{1}{(\bar{u} + \bar{c})^2} \left[(\bar{u} - \bar{c}) \frac{d\bar{c}}{dz_1} \right. \\ & \left. \left. - \bar{c} \frac{d\bar{u}}{dz_1} \right] \frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{\bar{c}^4}{\gamma (\bar{u} + \bar{c})} \frac{d}{dz_1} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{c}^2} \right) \frac{\partial p_1}{\partial z_0} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

第2近似解 u_2 が永年項をもたないためには、式(15)の右辺がゼロにならなくてはならない。 $\partial u_1/\partial t_0 = -\partial u_1/\partial z_0$, $p_1 = \gamma u_1/\bar{c}$, $\rho_1 = u_1/\bar{c}$ の関係を用いると、この条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\gamma + 1}{2(\bar{u} + \bar{c})} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_0} + \frac{1}{2(1 + \bar{M})} \left[\bar{M} \frac{d}{dz_1} \log \bar{M} \right. \\ \left. + \frac{d}{dz_1} \log (\bar{\rho} \bar{c} \bar{A}) \right] u_1 = \frac{1}{2\bar{\rho} (\bar{u} + \bar{c})^2} \frac{\omega \delta}{c_0 u_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_0^2} \end{aligned} \quad (16)$$

と書ける。ただし、定常流の局所 Mach 数 $\bar{M} := \bar{u}/\bar{c}$, δ は音波の拡散率であり、

$$\delta := \frac{\eta}{\rho_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta} + \frac{\gamma - 1}{c_p} \frac{\kappa}{\eta} \right)$$

ここで，独立変数の変換

$$\tau = t_0 - z_0, \tau_1 = t_1 - z_1, z_1 = z_1 \quad (17)$$

を行い，従属変数に関するスケーリング

$$u_1 = \psi(z_1) U(\tau, \tau_1, z_1) \quad (18)$$

を実行すれば，式(16)は

$$\frac{\partial U}{\partial z_1} - \frac{(\gamma+1)\psi}{2(\bar{u}+\bar{c})} U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2\bar{\rho}(\bar{u}+\bar{c})^2} \frac{\omega\delta}{c_0 u_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad (19)$$

のようなより簡単な形になる．ただし， ψ は次式を満たすように決める．

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dz_1} + \frac{1}{2(1+\bar{M})} \left[\bar{M} \frac{d}{dz_1} \log \bar{M} + \frac{d}{dz_1} \log (\bar{\rho} \bar{c} \bar{A}) \right] = 0. \quad (20)$$

ここで， $\bar{\rho} \bar{c} \bar{A} = \text{const.}/\bar{M}$ を考慮すると，式(20)は直ちに積分できて， ψ を \bar{M} の関数として表わすことができる(式(27)参照)．

さらに，次式を満足するような新しい座標 σ を導入する：

$$\frac{d\sigma}{dz_1} = \frac{\gamma+1}{2(\bar{u}+\bar{c})} \psi. \quad (21)$$

すると，式(19)から進行波の弱非線形伝播を記述する“修正された一般化された Burgers 方程式”

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{F(\sigma)}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \quad (22)$$

を得る．ここに， Re は音響 Reynolds 数であり，

$$Re := \frac{(\gamma+1)c_0 u_0}{\omega\delta}, \quad \left(\delta = \frac{\eta}{\rho_0} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta} + \frac{\kappa(\gamma-1)}{\eta c_p} \right\} \right). \quad (23)$$

また，

$$F(\sigma) := \frac{\psi^{-1}}{\bar{\rho}(\bar{u}+\bar{c})}. \quad (24)$$

修正された一般化された Burgers 方程式(22)に現れる各変数と管の断面積(距離 x)との関係を以下に明記しておこう．まず，

$$A = \frac{M_0}{\bar{M}} \left[\frac{2 + (\gamma-1)\bar{M}^2}{2 + (\gamma-1)M_0^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (M_0 = \frac{\bar{u}_0}{c_0}) \quad (25)$$

を解くことによって， $\bar{M} = \bar{M}(x)$ が定まる．そこで，各変数を \bar{M} あるいはその積分形として表わすと以下のようなになる．

$$U = \frac{u_1}{\psi}, \quad \tau = t - z; \quad (26)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\bar{M}}{M_0} \frac{1 + M_0}{1 + \bar{M}}}, \quad (27)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2 + (\gamma - 1)M_0^2}} \int_0^x \frac{\sqrt{2 + (\gamma - 1)\bar{M}^2}}{1 + \bar{M}} dx. \quad (28)$$

また,

$$F(\sigma) = \frac{1}{1 + M_0} \sqrt{\frac{\bar{M}}{M_0}} A; \quad (29)$$

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{2} \kappa M \int_0^x \sqrt{\frac{\bar{M}}{M_0} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}\bar{M}^2}{(1 + \bar{M})^3}} dx, \quad (\kappa = \frac{1 + M_0}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_0^2}). \quad (30)$$

ここで、管内の流れが存在しない極限の場合を考えてみよう。このときは、 $\bar{u} \rightarrow 0 (M_0 \rightarrow 0, \bar{M} \rightarrow 0)$ であるから、式(25)から $\sqrt{\bar{M}/M_0} \rightarrow 1/\sqrt{A}$ となることがわかり、式(27)と式(29)から

$$\psi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad F(\sigma) \rightarrow \sqrt{A}. \quad (31)$$

となる。したがって、各変数に関しては

$$U = M\sqrt{A}u, \quad \tau = t - x, \quad A = A(z_1) \quad (z_1 = Mx),$$

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{2} M \int_0^x \frac{1}{\sqrt{A}} dx. \quad (32)$$

この結果は、式(22)がこのとき従来からよく知られている管内の静止流体中を伝播する弱非線形波動を記述する一般化された Burgers 方程式になることを示す。すなわち、本研究で得られた修正された一般化された Burgers 方程式は管内流がない場合をも記述できる。

管内流がない場合には、式(32)から判るように音波の位相速度は一定である。ところが、流れがある場合には式(26),(28)から判るように位相速度は流れの影響を受け場所(x)の関数となり、考えている波動現象は大変複雑になる。さらに、速度振幅と関連する ψ^{-1} や伝播距離と関連する σ も流れの影響を受けることは明らかである(次節参照)。

最後に、次のことを指摘しておこう。流れが最初亜音速($M_0 < 1$)のとき、管の断面積が減少すると流速は増加する。流速がどんどん大きくなるとノズルの出口の点で音速に達することがある。このとき、さらに出口の外の圧力を下げてもノズル内の流れの状態は変わらない。このような現象をチョーキング(choking)と言う。チョーキングが起こっているとき、出口近傍の流れが音速に近い領域(遷音速領域)では、ここで行った解析は適用できない。

§5. 指数関数型ホーン (ノズル)

この節では、比較的簡単な形状をもつ指数型のホーンについて波の伝播特性がどのようなかを大雑把に考察する。流れは x 軸の正方向に流れるものとして、断面積 $A = \exp(\alpha x)$ の管を考える。明らかに、 α が正のとき断面積は x とともに単調に増加し、 α が負のとき断面積は x とともに単調に減少する。このとき、各変数は \bar{M} をパラメータとして以下のように表わせる。

$$\alpha x = \log \frac{M_0}{\bar{M}} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)\bar{M}^2}{2 + (\gamma - 1)M_0^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \alpha z &= \lambda \log \left[\frac{\sqrt{\gamma-1}\bar{M} + \sqrt{2 + (\gamma-1)\bar{M}^2}}{\sqrt{\gamma-1}M_0 + \sqrt{2 + (\gamma-1)M_0^2}} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{M_0(\sqrt{2} + \sqrt{2 + (\gamma-1)\bar{M}^2})}{\bar{M}(\sqrt{2} + \sqrt{2 + (\gamma-1)M_0^2})} \right)^{\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}} \right], \\ \lambda &= \left[\frac{\gamma-1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

$$F(\sigma) = \frac{1}{1 + M_0} \sqrt{\frac{M_0}{\bar{M}}} \left[\frac{2 + (\gamma-1)\bar{M}^2}{2 + (\gamma-1)M_0^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (35)$$

$$\alpha \sigma = \frac{\gamma+1}{2} M \frac{2(1+M_0)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2} \left[\frac{1}{1+M_0} - \frac{1}{1+\bar{M}} \sqrt{\frac{\bar{M}}{M_0}} \right], \quad (36)$$

ただし、 $\psi = \psi(\bar{M})$ は式(27)によってすでに与えられている。

図1は、 ψ と αx との関係を示したものである。 ψ は波の振幅因子であり、管の断面積が一定の場合には、 $\psi = 1$ となるように取られている。また、流れがない場合には、 $\psi = 1/\sqrt{A}$ となる。これに対する流れの影響は、断面積が増大するとき振幅の減少する割合を減じ、また断面積が減少するとき振幅の増大する割合を減ずる。その効果は、グラフの例で見る限り M_0 が大きいほど大きい。曲線の左方の端点は、そこで流れの流速が音速に達することを意味する(補遺参照)。

図2は、 αz と αx との関係を示す。流れがない場合には、 $z = x$ であり、したがって、このとき音波の位相速度は $c_0 (= \text{const.})$ となる(無次元化された位相速度は1)。流れがある場合には、 $\tau = t - z$ であるから、断面積が増大する場合 ($dx/dz > 1$) には、位相速度は c_0 よりも大きくなり、断面積が減少する場合 ($dx/dz < 1$) にはその逆の傾向を示す。その効果は、 M_0 が大きいほど大きい。

図3には $F = F(\sigma)$ のグラフが描かれている。 $F(\sigma)$ は散逸項に現れる因子であって、管の断面積が一定の場合には、 $F(\sigma) = 1$ であり、流れがない場合には、 $F(\sigma) = \sqrt{A}$ である。図から直ちにわかるように、流れが亜音速 ($M_0 < 1$) のときは、流れがあることによる影響は比較的少ないが、超音速 ($M_0 > 1$) になると、亜音速の場合とは全くこと

なり極めて大きな影響を持つことが判る。すなわち、散逸性の効果は非常に強められ、波はすぐに減衰してしまうであろう。

図4は、 $2\alpha\sigma/(\gamma+1)M$ と αx との関係を示したものである。音源から正弦波を放射したとき、音響Reynolds数が十分に大きければ、よく知られているように $\sigma=1$ において衝撃波が形成される。したがって、図より他のパラメータが固定されているとき、管の断面積が増大する場合には、流れがあるために衝撃波の形成距離は長くなることが判る。また、管の断面積が減少する場合においても、同様の効果を及ぼす。このとき、 M_0 が十分大きければ、衝撃波は形成されない。ただし、 $\alpha < 0$ のときには、衝撃波が形成される以前に流れの流速が音速に達するという状況が起こる。

一般に、単調に断面積が変化する管中の流れのなかを弱非線形伝播する波動は、定性的には、上に述べたような特性を示すであろう。

《補遺》

式(33)より

$$\frac{d(\alpha X)}{d\bar{M}} = \frac{2(\bar{M}^2 - 1)}{\bar{M}[2 + (\gamma - 1)\bar{M}^2]}. \quad (37)$$

これより、以下のことがわかる。もしも、 $\alpha > 0, M_0 > 1$ であれば、流れのMach数は x とともに増加する(流速が大きくなる)。また、 $\alpha > 0, M_0 < 1$ であれば、Mach数は x が増えたと減少する。一方、 $\alpha < 0, M_0 > 1$ であれば、流れのMach数は x が増えたと減少するし、 $\alpha < 0, M_0 < 1$ であれば、Mach数は x が増えたと増加する。このとき、ノズルが十分長ければ、流速はある点で音速に達する。

文献

- [1] D.G.Crighton : Basic Theoretical Nonlinear Acoustics. in Frontiers in Physical Acoustics ed.D.Sette(North-Holland , Amsterdam , 1986)

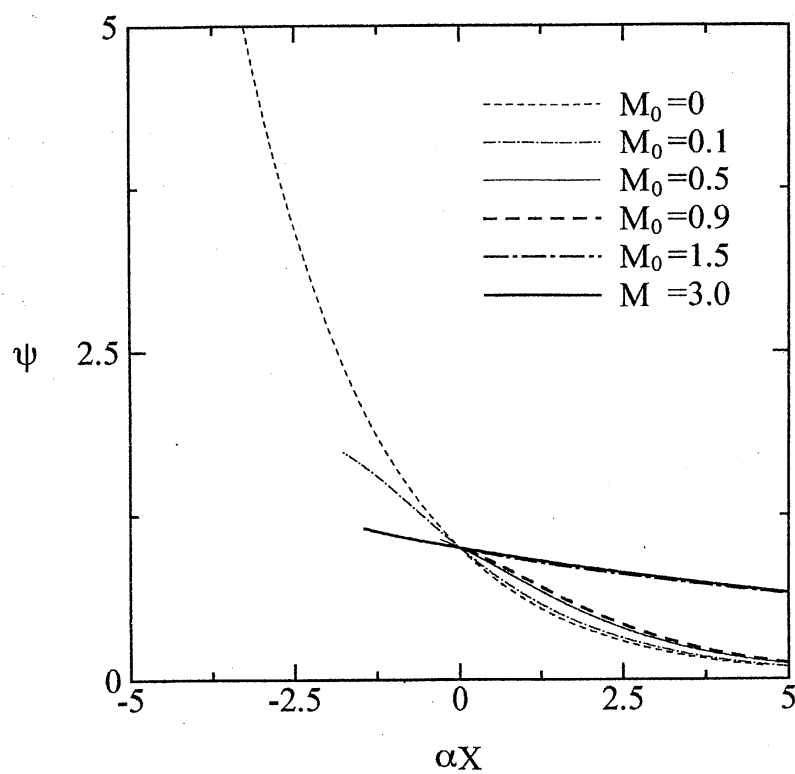


图 1

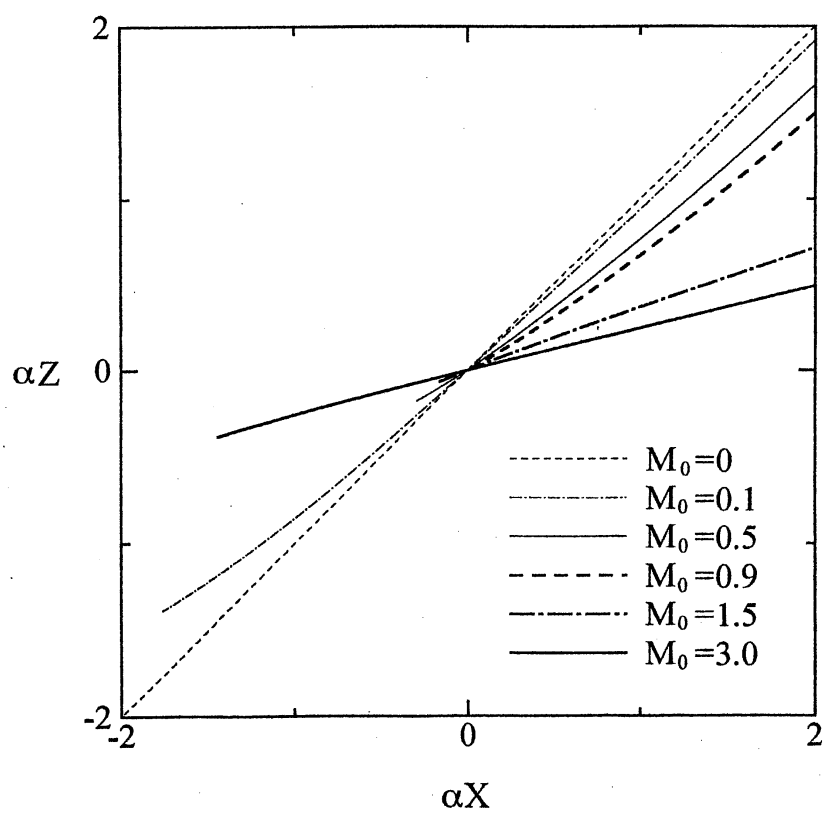


图 2

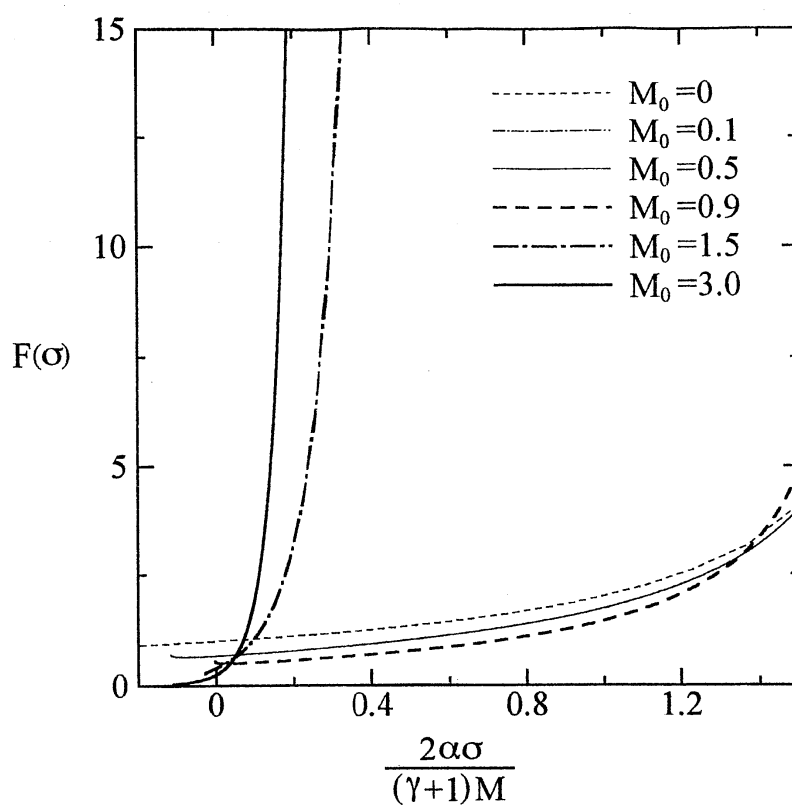


图 3

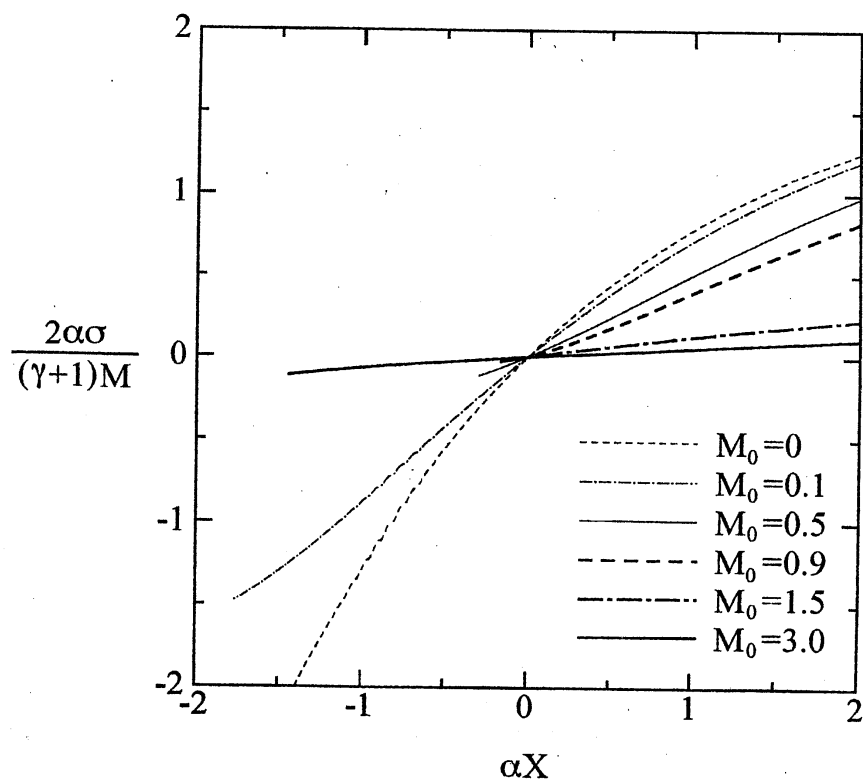


图 4